明細書

発明の名称

シンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング方法およびレンダリング装置

発明の背景

1．発明の属する技術分野

本発明は、非線形に進む光線を追跡し、対象物をレンダリングするレンダリング技術に関する。本発明は、特に、ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析法で解き、光線を追跡するシンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング方法およびレンダリング装置に関する。

2．関連技術の説明

可視化することは、様々な力学系を分析するための基礎技術である。コンピュータグラフィックスを用いて力学系を可視化する様々な方法がある。多くの可視化する方法の一つとして、光線追跡法は、コンピュータグラフィックスを用いた最も知られた方法であろう。

ここで、古典的な光線追跡法は、光線の軌道を計算する際に直線を用いる。この直線の方程式をここに示す。

$$r = a + s v \qquad \text{(式1)}$$

ここで、ｒは光線の軌道上の座標、ａは始点、ｖは方向ベクトル、ｓはパラメータ変数である。

（式１）は次のようにベクトル成分表示ができる。

$$x_i = a_i + s v_i \qquad \text{(式2)}$$

x_i はベクトル r の成分である。（式２）は、両辺を二回微分することで、次の微分方程式で表すこともできる。

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0 \qquad (式3)$$

結局のところ、古典的な光線追跡法は（式３）を使って光線の軌道を計算するレンダリング方法であると言える。

しかし、光線が直進しない物理現象は多数存在する。例えば、蜃気楼のように、屈折率が非一様な空間における現象である。また、４次元ブラックホール時空の可視化を図りたい場合もある。

例えば、屈折率が非一様な空間では、光線の方程式は次のようになる。

$$\frac{dn}{ds}\frac{dx^i}{ds} + n\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{\partial n}{\partial x^i} \qquad (式4)$$

ここで、ｎは屈折率を表す。（式４）は、幾何光学におけるフェルマーの原理から導くことができる。もしｎが定数なら、（式４）は（式３）に帰着する。

また、ブラックホール時空では、光線の方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \qquad (式5)$$

ここで、 Γ^i_{kl} はクリストッフェル記号と呼ばれる時空の曲率の計算に使用される関数である。（式５）は測地線の微分方程式と呼ばれる。

古典的な光線追跡法では、蜃気楼のように、屈折率が非一様な空間における現象や、４次元ブラックホール時空の可視化を図ることは困難である。

発明のサマリー

本発明は、屈折率が非一様な空間における現象、また、４次元ブラックホール時空の可視化を可能とするレンダリング方法およびレンダリング装置の提供を目的とする。

本発明は、高速自動微分法を用いてハミルトンの正準方程式を定式化し、定式化したハ

ミルトンの正準方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用して、シンプレクティック数値積分を実施することにより解く。

すなわち、本発明は、対象物の観測位置と視野スクリーンを決定し、上記高速自動微分法とシンプレクティック数値積分を用いたシンプレクティック・レイトレーシングを行い、光線と対象物表面の交差点の色情報を取得し、取得した色情報に基づいて前記対象物の描画を行う。

図面の簡単な説明

Ｆｉｇ．１は、シンプレクティック写像の意味を表す図である。

Ｆｉｇ．２Ａは、陽的オイラー法による計算結果を示す図である。

Ｆｉｇ．２Ｂは、シンプレクティック・オイラー法による計算結果を示す図である。

Ｆｉｇ．３Ａは、陽的オイラー法によるハミルトニアンの値を示す図である。

Ｆｉｇ．３Ｂは、シンプレクティック・オイラー法によるハミルトニアンの値を示す図である。

Ｆｉｇ．４は本発明に係るレンダリング装置の構成の一例を示す図である。

Ｆｉｇ．５は本発明に係るレンダリング処理フローの一例を示す図である。

Ｆｉｇ．６は本発明に係るレンダリング方法の概要を示す図である。

Ｆｉｇ．７は本発明を用いた描画の例を示す図である。

Ｆｉｇ．８は本発明を用いた描画の例を示す図である。

好適具体例の詳細な説明

本発明の原理についてまず説明する。光線の方程式は、上述した測地線の方程式、ヘルムホルツ方程式、アイコナール方程式など様々な形で表されるが、数学的にはこれらは全て次のハミルトンの正準方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{ds} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{ds} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}, \quad (式6)$$

ここで、q_iは位置座標、p_iはq_iに対応する運動量を表す。Hはq_iとp_iから構成されるハミルトニアンと呼ばれる関数である。

例えば、（式3）を導くためのハミルトニアンは次式で定義される。

$H=(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2)/2$

このハミルトニアンを偏微分してハミルトンの正準方程式を立てると、直線の方程式を導くことができる。蜃気楼のように屈折率が非一様な対象においては、次のハミルトニアンを用いることができる。

$H=n(x, y, z)(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2)/2$

相対性理論を考慮する場合、代表的な例として球対称ブラックホール時空では、光線の軌道を計算するためのハミルトニアンは次のようになる。

$$H=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\frac{{p_t}^2}{2}-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{{p_r}^2}{2} -\frac{{p_\theta}^2}{2r^2}-\frac{{p_\phi}^2}{2r^2\sin^2\theta},$$

ここで、（t，r，θ，φ）は4次元極座標系の成分、

$(p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$

は対応する運動量、r_gはブラックホール半径と呼ばれるブラックホールの質量に対応する量である。一般に、アインシュタインの重力場方程式の解をg^{ij}とすると、光線に対するハミルトニアンは次の式で表される。

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{3} g^{ij}p_ip_j$$

以上のように、通常、光線の運動に関するハミルトニアンは求めることができる。従って各種の方程式をプログラム上に実装しなくても、ハミルトンの正準方程式だけで様々な

対象のシミュレーションが可能となる。

次に、本発明で用いるシンプレクティック数値解析法について述べる。ハミルトンの正準方程式は、シンプレクティック性と呼ばれる性質を保存することが特徴である。シンプレクティック性は次のように定義されるシンプレクティック写像の性質のことである。

（定義）$(p(t_0), q(t_0))$ を $t=t_0$ での光子の座標であるとする。$(p(t_0+\triangle t), q(t_0+\triangle t))$ は $t=t_0+\triangle t$ での座標であるとする。任意の実数 t_0 に対し、写像 $(p(t_0), q(t_0)) \to (p(t_0+\triangle t), q(t_0+\triangle t))$ がシンプレクティック写像であるとは、

$$dq(t_0) \wedge dp(t_0) = dq(t_0+\triangle t) \wedge dp(t_0+\triangle t)$$

が成り立つことである。ここで、ｄｐ、ｄｑは各変数の１形式であり、∧は微分形式の外積を表している。

Ｆｉｇ．１はシンプレクティック写像の意味を表す図である。シンプレクティック性は、　ｄｐと　ｄｑというベクトルが存在し、その二つのベクトルが作る平行四辺形の面積Ｓが時間がたっても変わらないということを意味する。

本発明は、対象物がどんなものであってもハミルトンの正準方程式を用い、このハミルトンの正準方程式を、上記シンプレクティック性を保存するシンプレクティック数値解析法で解き、光線を追跡する。この手法をシンプレクティック・レイトレーシングという。シンプレクティック数値解析法は、ある初期値に対する数値的な計算結果が、初期値に対して上記定義を満たすように構成される。

本発明は、このシンプレクティック数値解析法を用いることにより、光線を追跡する際の誤差が少なくなる。従って、屈折率が非一様な空間における現象、また、４次元ブラックホール時空の可視化が可能となる。

本発明は、シンプレクティック数値解析法として、半陰的オイラー法であるシンプレクティック・オイラー法を用いる。シンプレクティック・オイラー法は、ハミルトンの正準方程式に以下のようなスキームを適用する方法である。

$$
\begin{cases}
p_{k+1} = p_k - \tau \dfrac{\partial H(p_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}} \\
q_{k+1} = q_k + \tau \dfrac{\partial H(p_{k+1}, q_{k+1})}{\partial p_{k+1}}
\end{cases}
$$

上記シンプレクティック・オイラー法は、以下のスキーム

$$
\begin{cases}
p_{k+1} = p_k - \tau \dfrac{\partial H(p_k, q_k)}{\partial q_k} \\
q_{k+1} = q_k + \tau \dfrac{\partial H(p_k, q_k)}{\partial p_k}
\end{cases}
$$

を用いる陽的オイラー法と数値計算の性能が大きく異なる。

Ｆｉｇ．２ＡとＦｉｇ．２Ｂは、シンプレクティク・オイラー法と陽的オイラー法との簡単な比較を示す。ｐ－ｑ平面内の各曲線は、ハミルトニアンＨ＝ｐｑ（ｐ＋ｑ－１）の場合の光線の軌道を示している。

Ｆｉｇ．２Ａが陽的オイラー法による光線の軌道を示し、Ｆｉｇ．２Ｂがシンプレクティック・オイラー法による光線の軌道を示している。この系に対しては解析解から閉曲線であることが判明しており、Ｆｉｇ．２Ｂが正しいことがわかる。

Ｆｉｇ．３ＡとＦｉｇ．３Ｂは、保持されるべきハミルトニアンの値を示す。Ｆｉｇ．３Ａは陽的オイラー法によるハミルトニアンの値を示す。ハミルトニアンの値は計算が進むとともに減少している。

Ｆｉｇ．３Ｂはシンプレクティック・オイラー法によるハミルトニアンの値を示す。ハミルトニアンの値はわずかな揺らぎはあるが保持されている。

このテストケースの場合、ハミルトニアンの形は極めて単純であったため、シンプレクティック数値解析法にはなんら問題がないように見える。しかし、上記ハミルトンの正準方程式を複雑なハミルトニアンに適用することは困難である。シンプレクティック・オイラー法を適用してハミルトンの正準方程式を立てるためにはハミルトニアンの全ての成分で偏微分しなければならないからである。

例えば、軸対称時空を表すハミルトニアンを考える。

$$H = \left(1 + \frac{r_g r(a^2 + r^2)}{\rho^2 \Delta}\right)\frac{p_t{}^2}{2} - \frac{\Delta}{\rho^2}\frac{p_r{}^2}{2} \qquad \text{(式7)}$$
$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{p_\theta{}^2}{2} - \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta \sin^2\theta}\frac{p_\phi{}^2}{2} + \frac{a r_g r}{\rho^2 \Delta} p_t p_\phi,$$

ａはブラックホールの角運動量に対応する量で、その他

$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta,\ \Delta \equiv r^2 - r_g r + a^2$

と定義される量である。ハミルトンの正準方程式をたてるために数式処理ソフトＭａｔｈｅｍａｔｉｃａを使ってθの偏微分を計算すると、次のような結果が出力される。

$$D[H,\theta] = \frac{2p_\phi p_t r r_g \cos\theta \sin\theta a^3}{(a^2 + r^2 - r r_g)(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$
$$-\frac{p_\phi{}^2(r^2 - r_g r + a^2\cos^2\theta)\cot\theta a^2}{(a^2 + r^2 - r r_g)(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$
$$+\frac{p_\phi{}^2\cot\theta a^2}{(a^2 + r^2 - r r_g)(r^2 + a^2\cos^2\theta)}$$
$$-\frac{p_\theta{}^2\cos\theta\sin\theta a^2}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$
$$-\frac{p_r{}^2(a^2 + r^2 - r r_g)\cos\theta\sin\theta a^2}{(r^2 + a^2\cos^2(\theta))^2}$$
$$+\frac{p_t{}^2 r(a^2 + r^2) r_g \cos\theta\sin\theta a^2}{(a^2 + r^2 - r r_g)(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$
$$+\frac{p_\phi{}^2(r^2 - r_g r + a^2\cos^2\theta)\cot\theta\csc^2\theta}{(a^2 + r^2 - r r_g)(r^2 + a^2\cos^2\theta)}$$

このような複雑な式を実装するのは大変だし、ミスが発生する可能性もある。さらに計算に時間がかかることも予想される。

そこで、本発明は、以下に述べる高速自動微分法を採用することで、ハミルトニアンＨを与えてやれば自動的に微分を計算し、ハミルトンの正準方程式を定式化できるようにする。

（高速自動微分法）

高速自動微分法では、まずベクトル

$$(f(p,q), \partial pf, \partial qf)$$

を定義する。

この時、例えば、加算と乗算は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
&(f,\partial_p f,\partial_q f)+(g,\partial_p g,\partial_q g)\\
=&(f+g,\partial_p f+\partial_p g,\partial_q f+\partial_q g)\\
&(f,\partial_p f,\partial_q f)\times(g,\partial_p g,\partial_q g)\\
=&(fg,\partial_p f\times g+f\times\partial_p g,\partial_q f\times g+f\times\partial_q g)
\end{aligned}
$$

上記のように、演算と同時に微分が計算されていく。例えば、ｘ^2 とｘの乗算結果はｘ^3 で、その微分は３ｘ^2 であるが、上記計算規則を使うと（ｘ^2 ，２ｘ）×（ｘ，１）＝（ｘ^3 ，３ｘ^2 ）と乗算を計算すると自動的に微分も計算される。

シンプレクティック・レイトレーシングの場合、ハミルトニアンの値を計算すると、ハミルトニアンの導関数が全て同時に計算されることになる。これにより、ハミルトンの正準方程式が定式化される。

ハミルトニアンＨ＝ｐｑを計算してみると、

$$
\begin{aligned}
&(p,1,0)\times(q,0,1)\\
=&(p\times q,\partial_p p\times q+p\times\partial_p q,\partial_q p\times q+p\times\partial_q q)\\
=&(pq,1\times q+p\times 0,0\times q+p\times 1)\\
=&(pq,q,p)\\
=&(H,\partial_p H,\partial_q H)
\end{aligned}
$$

というようにハミルトニアンの導関数が打切り誤差を生じることなく自動的に計算される。従って、ハミルトンの正準方程式が定式化できる。

Ｆｉｇ．４は本発明に係るレンダリング装置の構成の一例を示す図である。１はレンダリング装置、１１は対象物の観測位置と視野スクリーンを決定する観測位置・視野スクリーン決定部、１２はシンプレクティック・レイトレーシングを行うシンプレクティック・レイトレーシング部、１３は光線と対象物表面の交差点の色情報を取得する色情報取得部、１４は取得した色情報に基づいて対象物を描画する描画部、１５は対象物と対象物に特有のハミルトニアンＨとの対応情報が蓄積されている対象物情報蓄積部である。

また、シンプレクティック・レイトレーシング部１２内において、１２１はハミルトンの正準方程式を定式化するハミルトンの正準方程式定式化部、１２２はハミルトンの正準

方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用してシンプレクティック数値積分を実施するシンプレクティック数値積分部である。

以下に、Ｆｉｇ．５およびＦｉｇ．６を用いて、本発明に係るレンダリング処理を説明する。Ｆｉｇ．５は、本発明に係るレンダリング処理フローの一例を示す図である。本発明に係るレンダリング方法の概要を示すＦｉｇ．６中、左下の”ＣＲＬ”という文字列３０が対象物だとする。

まず、観測位置・視野スクリーン決定部１１が観測位置を決定する（ステップＳ１）。例えば、Ｆｉｇ．６に示す観測者の目３１の位置を決定する。次に、観測位置・視野スクリーン決定部１１が視野スクリーン３２を決定する（ステップＳ２）。Ｆｉｇ．６では視野スクリーン３２が中央の正面に示される。次に、シンプレクティック・レイトレーシング部１２が、以下のステップ３およびステップ４を実施することにより、対象物と交差するまで光線を追跡する（シンプレクティック・レイトレーシング）。

まず、ハミルトンの正準方程式定式化部１２１が、ハミルトンの正準方程式を定式化する（ステップＳ３）。すなわち、ハミルトンの正準方程式定式化部１２１が、対象物情報蓄積部１５から抽出された、対象物に対応するハミルトニアンHに基づいて、高速自動微分法を用いて、ハミルトンの正準方程式を定式化する。例えば、上述したように、Ｈ＝ｐｑを計算する場合、高速自動微分法を用いると、

$$
\begin{aligned}
& (p,1,0)\times(q,0,1) \\
= \; & (p\times q, \partial_p p\times q + p\times\partial_p q, \partial_q p\times q + p\times\partial_q q) \\
= \; & (pq, 1\times q + p\times 0, 0\times q + p\times 1) \\
= \; & (pq, q, p) \\
= \; & (H, \partial_p H, \partial_q H)
\end{aligned}
$$

のようにハミルトニアンの導関数が全て計算され、ハミルトンの正準方程式が定式化される。

そして、シンプレクティック数値積分部１２２が、シンプレクティック数値積分を実施する（ステップＳ４）。すなわち、シンプレクティック数値積分部１２２が、定式化され

たハミルトンの正準方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用して、シンプレクティック数値積分を実施する。

シンプレクティック・オイラー法を用いたシンプレクティック数値積分の実施により、順次ｐ、ｑが求められ、光線追跡を行うことができる。

次に、色情報取得部１３が色情報を取得する（ステップＳ５）。具体的には、光線と対象物表面の交差点の色を取得する。そして、描画部１４が描画を行い（ステップＳ６）、処理を終了する。例えば、Ｆｉｇ．６の中で光線が点線のように曲がって進んだとすると、ＣＲＬの文字列が逆さまになって描画される。３３は視野スクリーン３２に描画される画像を示し、３４は、観測者の目に映る画像を示す。

次に、本発明を用いた描画の例を以下に示す。ここでは、ブラックホール空間は原点にブラックホールが一つ存在する４次元空間を指すものとする。ハミルトニアンとして

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{{p_t}^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{{p_r}^2}{2} - \frac{{p_\theta}^2}{2r^2} - \frac{{p_\phi}^2}{2r^2 \sin^2\theta},$$

を用いた場合、Ｆｉｇ．７に示す画像が生成される。Ｆｉｇ．７のような現象は重力凸レンズ効果として知られている。

また、軸対称時空におけるハミルトニアンである（式７）のハミルトニアンを用いると、Ｆｉｇ．８に示す画像が生成される。

特許請求の範囲

１．シンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング方法であって、

対象物の観測位置と視野スクリーンを決定するステップと、

シンプレクティック・レイトレーシングを行うステップと、

光線と対象物表面の交差点の色情報を取得するステップと、

前記取得した色情報に基づいて前記対象物の描画を行うステップとから構成される。

２．請求項１に記載のシンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング方法において、

前記シンプレクティック・レイトレーシングを行うステップは、

高速自動微分法を用いてハミルトンの正準方程式を定式化するステップと、

前記定式化したハミルトンの正準方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用して、シンプレクティック数値積分を行うステップとから構成される。

３．シンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング装置であって、

対象物の観測位置と視野スクリーンを決定する観測位置・視野スクリーン決定手段と、

シンプレクティック・レイトレーシングを行うシンプレクティック・レイトレーシング手段と、

光線と対象物表面の交差点の色情報を取得する色情報取得手段と、

前記取得した色情報に基づいて前記対象物の描画を行う描画手段とを備える。

４．請求項３に記載のシンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング装置において、

前記シンプレクティック・レイトレーシング手段は、

高速自動微分法を用いてハミルトンの正準方程式を定式化する手段と、

前記定式化したハミルトンの正準方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用して、シンプレクティック数値積分を行う手段とから構成される。

開示の要約

本発明のシンプレクティック・レイトレーシングを用いたレンダリング方法は、対象物の観測位置と視野スクリーンを決定し、シンプレクティック・レイトレーシングを行い、光線と対象物表面の交差点の色情報を取得し、取得した色情報に基づいて前記対象物の描画を行う。

本発明におけるシンプレクティック・レイトレーシングは、対象物に対応するハミルトニアンHに基づいて、高速自動微分法を用いて、ハミルトンの正準方程式を定式化し、定式化されたハミルトンの正準方程式にシンプレクティック・オイラー法を適用して、シンプレクティック数値積分を実施することにより行われる。

本発明は、上記構成を採ることにより、屈折率が非一様な空間における現象や、４次元ブラックホール時空の可視化を図ることができるレンダリング方法およびレンダリング装置の提供が可能となる。